

限界降伏面模式於 FLAC 有效應力分析模組之開發

王天佑¹, 馮正一², 冀樹勇¹, 陳錦清¹

¹中興工程顧問社 大地工程研究中心

²中興大學 水土保持學系

摘要

本文以限界降伏面模式(Bounding Surface Hypoplasticity Model), 配合在地工數值分析應用廣泛之顯性時間域有限差分數值分析程式 FLAC, 以 C++ 語言開發其所提供之使用者自訂模式 (User-Defined Model, UDM)分析模組, 探討其在土壤有效應力動態分析中之適用性。為驗證分析模組之正確性, 研究中亦採用包括矽灰、Leighton Buzzard sand 等材料發表於相關文獻之試驗結果, 以本模組模擬這些土壤材料進行相對應的三軸壓縮試驗、應力或應變控制之動態三軸試驗及單剪試驗等。數值模擬結果顯示, 本模組在超額孔隙水壓變化、應力膨脹收縮、遲滯圈及勁度變化等重要特性均能適切模擬試驗結果。

IMPLEMENTATION OF BOUNDING SURFACE HYPOPLASTIC MODEL ON FLAC

T.Y. Wang¹, Tony Feng², S.Y. Chi¹, J.C. Chern¹

¹Geotechnical Engineering Research Center, Sinotech Engineering Consultants, Inc.

²Soil and Water Conservation Department, National Chung Hsing University

ABSTRACT

The Bounding Surface Hypoplasticity Model proposed by Wang (1990) was adopted as an User-Defined Model to the well known time domain explicit finite difference numerical analysis program FLAC. Laboratory tests including triaxial compression test, dynamic triaxial tests in stress controlled and strain controlled condition and simple shear test on materials like silicon flour and Leighton Buzzard sand were used to calibrate and validate the model. Numerical simulation results show that this approach and the present implementation are capable of duplicating the most important features of soil behavior such as pore pressure generation, stress dilatancy, hysteretic loops for energy dissipation under both static and cyclic loading.

一、前言

鬆軟之飽和砂質土壤, 在受地震造成的反覆應力作用下, 土壤之勁度隨孔隙水壓之增高而逐漸減弱, 輕者產生結構物之差異沉陷變形, 嚴重者土體發生液化或流動變形, 造成地盤承載力喪

失而導致結構物破壞。此種破壞機制，雖經 1960-70 年代國外數個地震災害案例而引起全世界地工界廣泛研究而得以瞭解，各種經驗設計及分析方法亦被提出，並應用於工程設計中。然而，由於土壤在反覆荷重下之應力路徑變化十分劇烈，重要之特性諸如超額孔隙水壓之激發與消散、應力膨脹與收縮(stress dilatancy and contraction)、應變之累積乃至於遲滯圈及勁度隨累積應變增減之行為等等，均難以使用傳統之等值線彈性(equivalent linear)模式或彈塑性(如 Mohr-Coulomb 等)模式直接予以模擬。

配合數值分析電腦程式之發展，土壤有效應力分析模式之開發，乃近二、三十年來在地工分析上之重要研發領域之一，目前一般有效應力分析可分為部份耦合與完全耦合分析模式兩類，其間差異在於描述孔隙水與土壤顆粒間受力產生之互制影響。部份耦合分析模式之任一時間增量係以反覆剪應變與剪應變增量透過試驗求取之迴歸經驗關係，計算土壤之塑性體積應變增量，然後再透過土壤塑性體積應變增量與孔隙水壓之關係，求得孔隙水壓增量，最後再計算相應之有效應力增量，如 Finn(1977)與 Pan et al.(2003)之分析模式；而在完全耦合分析模式中，其有效應力增量、剪應變增量與體積應變增量係透過完整之彈塑性組合律理論，同時計算土壤受力後之有效應力與孔隙水壓變化量，其模式如 Beaty and Byrne(1998)提出之傳統塑性模式(Classical plasticity model)、Prevost(1977)提出之層疊降伏面模式(Nested yield surface model)、Pastor and Zienkiewicz(1990)提出之通用塑性模式(Generalized plasticity model)與 Wang(1990)所提出之限界降伏面模式(Bounding Surface Hypoplastic Model, BSHM)等。Smith(1994)針對 VELACS(Verification of Liquefaction Analyses by Centrifuge Studies)計畫數值模擬結果歸納，顯示完全耦合分析模式較能掌握土壤之動態力學行為。Arulanandan(1996)亦提出類似之結論。此說明了完全耦合分析模式，不僅為目前有效應力模式研究之方向，亦為未來工程應用之主要分析模式。因此，本研究選擇完全耦合之 BSHM 模式，並配合在地工數值分析應用廣泛之顯性時間域有限差分數值分析程式 FLAC，以 C++ 語言開發其所提供之使用者自訂模型(User-Define Model, UDM)分析模組，模擬土體受動態應力之行為。

二、限界降伏面模式之理論沿革

依據彈塑性理論，元素之應變增量，可分解為彈性應變增量及塑性應變增量。彈性應變增量部份可由下式推求：

$$\dot{e}^e = \frac{1}{2G} p \dot{r} + \left(\frac{1}{2G} r + \frac{1}{3K} I \right) \dot{p} \quad (1)$$

$$p = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3), r = \frac{s}{p}, s = \begin{pmatrix} s_{11} \cdot p & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} \cdot p & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \cdot p \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式中 s_1, s_2, s_3 = 主應力； s_{ij} = 各向應力； s = 應力偏量； G 與 K 分別為彈性剪力模數與體積變形模數，由於土壤即使於彈性範圍內， G 與 K 仍隨平均壓應力 p 以及初始孔隙率 e_{in} 變化，Wang 建議可採下式模擬之：

$$G = p_a G_0 \frac{(2.973 - e_{in})^2}{1 + e_{in}} \sqrt{\frac{p}{p_a}} \quad (2)$$

$$K = p_a \frac{1 + e_{in}}{k} \sqrt{\frac{p}{p_a}} \quad (3)$$

上式中 p_a 為大氣壓力， G_0 與 k 均為材料之參數，可分別由剪力波速及壓密試驗推求。

傳統塑性理論源自於對金屬材料受力行為之描述，並假定材料受等向應力之體積變形均為彈性變形，塑性變形僅於受剪應力時發生。然而，由於土壤為由水、空氣及土壤顆粒組合而成之多相性材料，無論受等向應力或剪力，塑性變形均可能因為土壤顆粒之重新排列而產生，因此，現代之有效應力分析模式多採用由剪力引致之剪力變形模數 H_r 、體積變形模數 K_r ，以及由等向應力引致之剪力變形模數 H_p 、體積變形模數 K_p 等數個變形模數來分別描述土壤材料之彈塑性變形行為。

2.1 限界降伏面於荷載過程中之變化

Dafalias(1982)觀察土壤材料在受單純荷載及卸載作用，發現其應力-應變曲線最終將逼近於應力空間下之特定限界面(bounding surface)，並建議由一組通用性公式來描述元素之塑性應變增量與應力狀態、應力歷史、限界面間之關係。承襲此架構，BSHM 模式假設土壤材料受力時，其主應力空間中，存在兩個以等主應力線為軸之限界降伏面，分別為破壞面(failure surface)以及預載面(maximum pre-stress memory surface)：破壞面即 Dafalias 所發表之限界面，為材料之極限狀態，應力路徑趨近破壞面時，將沿破壞面之切線方向修正，且無法超越破壞面之範圍；預載面為土壤元素在過去的應力歷史中，曾經承載過的最大應力紀錄。為反映土壤材料受壓及受張之特性不同，限界降伏面可由材料受壓與受張時之特徵量與主應力軸之夾角，由下式線性內插求得：

$$Q(?) = \frac{(g(?) - c)Q_c + (1 - g(?))Q_e}{1 - c}, c = \frac{Q_e}{Q_c} \quad (4)$$

$$g(?) = \frac{2c}{(1 + c) - (1 - c)\cos 3\theta} \quad (5)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{S}{J} \right)^3, S = \sqrt[3]{\frac{1}{3} s:s:s}, J = \sqrt{\frac{1}{2} s:s} \quad (6)$$

其中 J 為應力偏量第二不變量； θ 與 Lode Angle 之物理意義相同，惟 $\theta = 0^\circ$ 時代表受壓狀態， $\theta = 60^\circ$ 時代表受張狀態。

由於限界降伏面均對等應力線對稱，令破壞面壓力側之正規化極限應力偏量值為 R_f ，則破壞面投影至 \mathbf{p} 平面上之各點，均可透過(4)式至(6)式定義；同理，預載面亦可以預載面壓力側之正規化應力偏量值 R_m 予以定義。在應力空間中，對應力路徑變化之描述，亦可由投影於 \mathbf{p} 平面上之各向量說明之：令 $\hat{f} = 0$ 與 $\bar{f} = 0$ 分別代表破壞面與預載面之方程； \mathbf{r} 與 $\bar{\mathbf{r}}$ 分別代表元素之目前之應力及應力增量； \mathbf{a} 為投影中

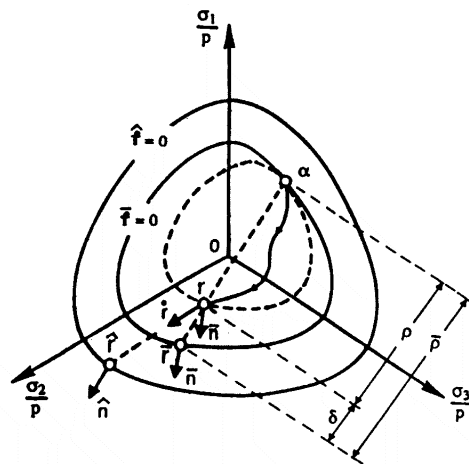


圖 1 應力路徑與向量投影(摘自 Wang,1990)

心； \hat{n} 為自 r 沿 \dot{r} 方向，投影於破壞面 $\hat{f} = 0$ 上之法線單位向量； \bar{n} 為自 a 沿 $r - a$ 方向，投影於預載面 $\bar{f} = 0$ 上 \bar{r} 點之法線單位向量； r 為 a 至 r 之距離； \bar{r} 為 a 至 \bar{r} 之距離，且定義 $d = \bar{r} - r$ 。各向量如圖 1 中所示。

在初始加載 (loading) 狀態中，投影中心 a 為座標軸原點，此時 \bar{n} 即為 r 在預載面上之法線向量，隨著應力漸漸增加，預載面將隨 r 之增加而漸次加大，當元素之應力路徑方向於某點發生變化，使得卸載 (unloading) 作用發生時，該點即成為新的投影中心 a ，且預載面即不再隨應力縮小，直到 r 沿任意方向再度超過預載面時，預載面再度隨 r 漸次加大，直至預載面與破壞面重合為止。

試驗室進行動態三軸試驗時，試體之加載與卸載過程很容易判斷，但模擬如壩體在地震時之反應時，各元素之應力路徑相互影響，較難直接判定卸載作用何時發生。但由上述各向量之定義可知，當應力增量方向 \dot{r} 與預載面法線向量 \bar{n} 之夾角小於 90° 時，預載面將隨 r 之增加而漸次加大，亦即在加載狀態；夾角大於 90° 時則為卸載狀態；如其夾角恰等於 90° ，應力路徑將沿預載面變化。

2.2 變形模數之定義

BSHM 模式建議，土壤元素之塑性變形增量，可由前述各彈塑性變形模數、應力應變狀態與此二限界降伏面之相對關係計算：

$$\dot{e}^p = \left(\frac{1}{H_r} n_d + \frac{1}{3K_r} \mathbf{I} \right) (p\dot{r} : n_n) + \left(\frac{1}{H_p} r + \frac{1}{3K_p} \mathbf{I} \right) h(p - p_m) \langle \dot{p} \rangle \quad (7)$$

n_d 為因 \dot{r} 引致之塑性變形增量之方向向量； n_n 則為耦合應力加載之方向向量。BSHM 模式假設此二向量均可由 \hat{n} 以及 \bar{n} 以線性內插之方式求取。依據 Dafalias 之觀察，當元素之應力趨近於破壞面時，由剪力變化引致之剪力變形模數 H_r 將趨近於 0；且根據 Masing Rule，應力於預載面內時， H_r 應為 R_m 及 R_f 比值之函數；BSHM 模式建議採用之公式為：

$$H_r = Gh_r \left[\frac{R_f}{R_m} \left(\frac{?}{?} \right)^m - 1 \right], \quad m = \frac{R_m(1 + g(\bar{?}))}{?} \quad (8)$$

由剪力變化引致之體積變形模數 K_r ，則可由針對土壤於不排水狀態下之變形行為歸納而得，假設孔隙水壓激發速率遵循 $\dot{u} = wp\dot{r} : n_n$ ，則

$$K_r = p_a \sqrt{\frac{p}{p_a} \frac{1 + e_{in}}{w?}} \quad (9)$$

w 為水壓激發參數，隨應力偏量而變，BSHM 模式建議之公式組如下：

$$w = w_r + (w_m - w_r) \left(\frac{r}{\bar{r}} \right)^{30} \quad (10)$$

$$w_m = \frac{1}{k_r} \left(\frac{p}{p_m} \right)^a \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^b \left(\frac{R_p - R_m}{R_f - R_m} \right), \quad w_r = \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^d \quad (11)$$

同時，BSHM 模式亦提出由等向應力引致之剪力變形模數 H_p 、體積變形模數 K_p 公式如下：

$$H_p = \sqrt{2} p_a \sqrt{\frac{p}{p_a} (1 + e_{in})} h_p g(\bar{?}) R_f \quad (12)$$

$$K_p = p_a \sqrt{\frac{p}{p_a} \frac{1+e_{in}}{?-?} \left(\frac{g(\bar{?})R_f}{g(\bar{?})R_f - R} \right)} \quad (13)$$

上數式中， h_r 、 k_r 、 R_p 、 h_p 、 I 、 k 等為均為材料常數，可透過三軸試驗及壓密試驗求取；而 a 、 b 、 d 等為擬合參數，需依據上述試驗結果以曲線擬合 (curve fitting) 之方式求取。

三、FLAC 程式之 UDM 模組

FLAC 程式為美國 Itasca 公司所發展之有限差分大地工程數值分析程式，其程式特點除針對大地工程材料特性內建岩土力學組合律模式外，並提供 Fish 程式語言，讓使用者可自行定義材料組合律，增加該程式之使用彈性，方便工程師分析各種不同狀況之地工問題。惟 Fish 係以文字方式儲存之直譯式 (Interpretation) 語言，執行時需再即時轉譯為機器碼 (Machine Code) 交由電腦運算，故執行效率較低，尤其在使用者自行定義之材料組合律運算時為甚。故 Itasca 公司在 FLAC 程式 4.1 版 (尚未正式發行) 已進行改進，在使用者自行定義材料組合律時，採 C++ 語言開發使用者自訂模式，並編譯成以機器碼儲存之動態連結程式庫 (dynamic link library, DLL) 形式，以之與分析程式之核心完全連結，此亦為目前若干泛用型 (general purpose) 數值分析程式提供使用者擴充材料模式之最有效率的方式。

UDM 模組執行流程係根據 FLAC 傳入之每階段元素應力及應變增量等資訊，透過 UDM 模組之計算，求得應力增量並回傳核心程式，以進行整體系統之力平衡運算，係屬於應變驅動 (strain driven) 之計算方式，故所有 UDM 模組之數學模型，均需以各元素為單位，整理為 $\dot{\sigma} = ? \dot{\epsilon}$ 之形式。本文所提限界降伏面模式可由 (1) 式及 (7) 式，藉 $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$ 之關係，透過代數運算求得元素之勁度矩陣 Λ ，據以開發限界降伏面 UDM 模組之原始碼。BSHM 模式之 UDM 模組計算中結合了元素所記憶之限界降服面，考慮硬化 (hardening) 及應力應變增量之方向來決定塑性模數，並計算新的應力狀態。由於元素之勁度矩陣係根據前述各變量而定，故本模式之計算結果亦為增量非線性 (incrementally nonlinear)，適足以模擬應力路徑對土壤元素之複雜影響。

FLAC 之 UDM 模組除較原 Fish 語言在材料組合律分析運算上有較佳之執行效率外 (執行速度為 Fish 語言之兩倍以上)，若以三維應力應變關係撰寫 UDM 模組，則可直接應用於提供 UDM 模組之 FLAC 3D 程式，進行三維問題之分析，其應用性將大幅提昇。

四、數值模擬結果

Shen (1989) 等人針對可能產生液化的砂質粉土，採用顆粒細緻且均勻之矽灰 (Silicon Flour) 作為試驗材料，進行一系列靜態及動態三軸試驗，由於其試驗對象單純且結果完整，本研究主要採用其試驗結果以前述 BSHM 模式開發之 UDM 模組進行模擬。同時，為驗證本模組計算之正確性，數值模擬參數係採用 Wang 針對同系列試驗，以其自行開發參數校正式所建議之模型參數 (如表 1 中所示) 與實際試驗結果進行比對。除矽灰外，本研究亦引用 Yamada (1983) 針對 Leighton Buzzard sand 所發表之單剪試驗結

表 1 數值模擬採用參數

??	Silicon Flour	Leighton Buzzard sand
Mc	1.7168	1.5918
c	0.5620.	1
Mp	1.5472	1.0409
G0	105	600
k	0.005	0.0036
I	0.01	0.009
hp	2*	28.2
kr	0.67	0.202
hr	0.3	0.075
a	0.5	0.5
b	0.5	2
d	1.2*	2*

*Wang 未進行校正，以試驗資料推求

果，以 BSHM 模組進行模擬，各試驗結果與數值模擬比對之結果說明如下：

4.1 三軸壓縮試驗

Shen 利用矽灰所進行之不排水三軸壓縮試驗，係以相對密度 80% 之重模試體，在不同圍壓下進行，試驗開始時，軸向壓力與圍壓相同，然後慢慢增加軸向壓力，此時，超額孔隙水壓因不排水狀態逐漸增加，造成平均有效應力 p 反隨軸壓之增加漸減，當試體接近破壞面 (q/p) 時，剪脹 (Dilatancy) 現象逐漸發生，並於應力路徑上產生明顯之相位轉換 (phase transform)，同時，因剪脹現象造成之孔隙水壓消散，再度使有效應力增加，使應力路徑方向沿破壞面方向劇烈變化，終致沿破壞面進行。由試驗資料顯示，材料之破壞面並不隨圍壓之變化而異，且雖其相位轉換面與破壞面十分接近，但由其造成之有效應力增減之行為，亦不難由圖 2 中觀察而知。BSHM 模式數值模擬時採 FLAC 之軸對稱模式，圍壓等應力控制條件悉數與相對應之三軸試驗結果相同。數值模擬結果亦顯示出破壞面、相位轉換面等效應，在同一組模型參數下，僅改變圍壓重新計算後之模擬結果亦與試驗結果相仿，足證本模型經過適當的參數校正後，可預測該土壤材料在不同試驗條件下之靜態受壓行為。

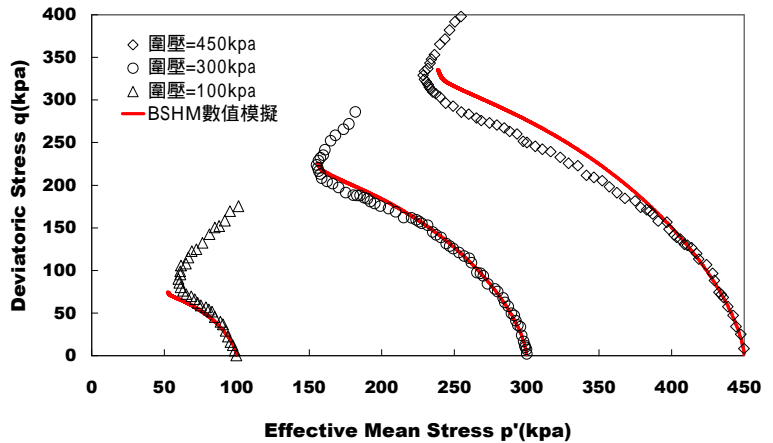


圖 2 矽灰之三軸壓縮試驗及數值模擬結果

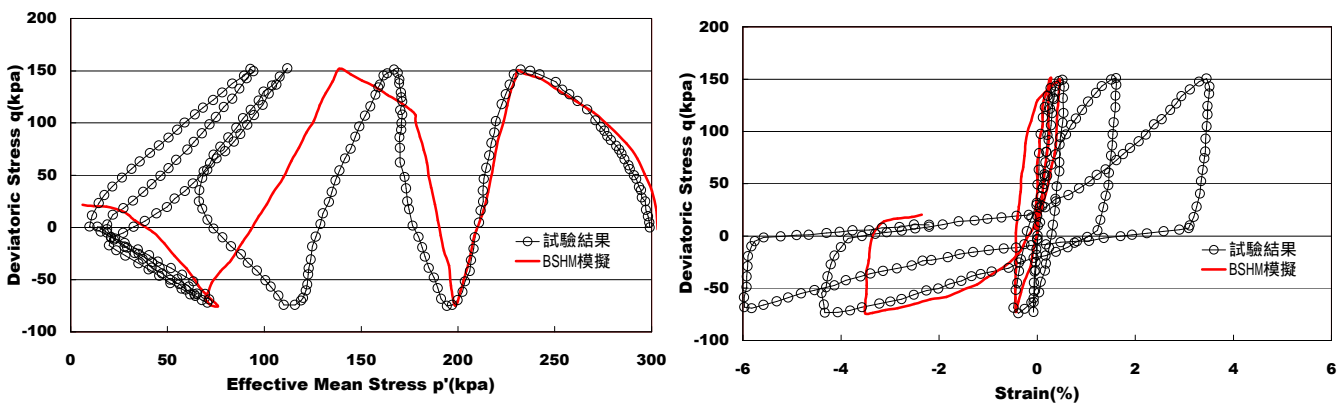


圖 3 矽灰之應力控制三軸動態試驗

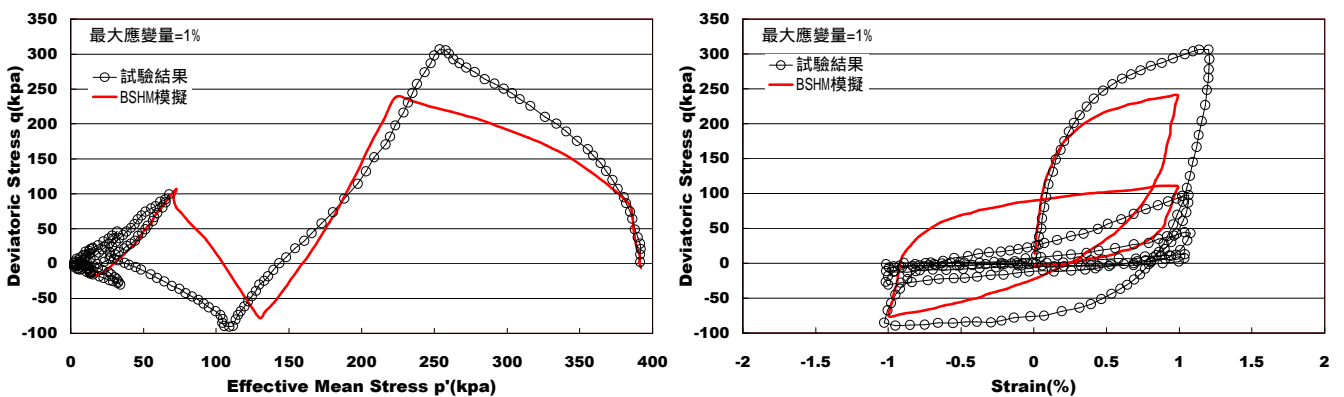


圖 4 矽灰之應變控制三軸動態試驗

4.2 三軸動態試驗

由於材料於動態試驗中，對剪力變化十分敏感，即使同一材料在相同試驗條件下，其反應亦有相當大之差異，故數值模擬之模型參數校正，大多採靜態試驗結果為主。對於動態試驗模擬之比對，主要係針對剪脹現象、孔隙水壓變化速率以及勁度弱化等現象發生之時機進行探討。

矽灰之三軸動態試驗分別以應力控制及應變控制進行。為避免應變過大導致試體破壞，應力控制之動態三軸試驗，採 300kpa 等向壓力作為初始圍壓，軸差壓力於壓力側達 150kpa 時解壓；並於張力側達 75kpa 時反轉。試驗初期之反應與三軸壓縮試驗大致相仿，如圖 3 中所示，但於第二周加壓過程中，於實際試驗資料及數值模擬結果中，均可觀察到應力路徑在軸差應力達約 120kpa 前後有明顯差異，此為 BSHM 模式數值理論中，預載面所造成之影響。其次，第一次剪脹現象在試驗資料與數值模擬發生時機僅差半個週期，對此行為之模擬可謂相當準確。此外，觀察應變對軸差壓力之關係圖，在應變量十分大時發生應變硬化，且整體勁度隨加壓周數弱化之現象十分明顯，弱化之比例亦十分相近。

應變控制之三軸動態試驗初始圍壓採 400kpa，於應變量達到 1%時反轉荷載方向。於實際試驗資料及數值模擬結果中，均可觀察到其孔隙水壓增加之速率，在應力路徑未達相位變化線(剪脹現象發生)前，均接近為一常數值，如圖 4 中所示，且其勁度弱化之速率與比例亦十分接近。綜合以上觀察可知，BSHM 模式對矽灰材料之動靜態試驗反應之模擬堪稱理想。

4.3 單剪試驗

不排水三軸動態試驗之加壓過程，由於係軸向加壓，剪力變化發生之同時通常伴隨體積著變化，雖可觀測到孔隙水壓之激發，但在一般的三軸試驗設備中，難以判定其孔隙水壓增加量有多少係因體積變化而產生，故因剪力造成之孔隙水壓激發量亦難以推求。Yamada 以不排水單純剪力試驗(Simple Shear test)對 Lighton Buzzard sand 進行之試驗結果與 BSHM 模式模擬之比對，適可將受壓體積變化之變因排除在外，探討剪力引致孔隙水壓激發之機制。本研究進行之數值模擬，選擇相對密度 80%之重模試體，圍壓為 100kpa，最大剪力分別在較小(15.3kpa)及較大(25kpa)兩種狀況進行之應力控制試驗資料進行，如圖 5 中所示。如同前述矽灰之動態三軸試驗一般，其水壓激發速率、硬化現象、以及預載面之影響等，均可理想模擬，尤於剪力較大時，其應力路徑與試驗結果幾乎一致。由於單剪試驗之荷載條件與真實地震較為相近，此結果足證 BSHM 模式為研究真實地震作用下之反應與行為，深具潛力之工具。

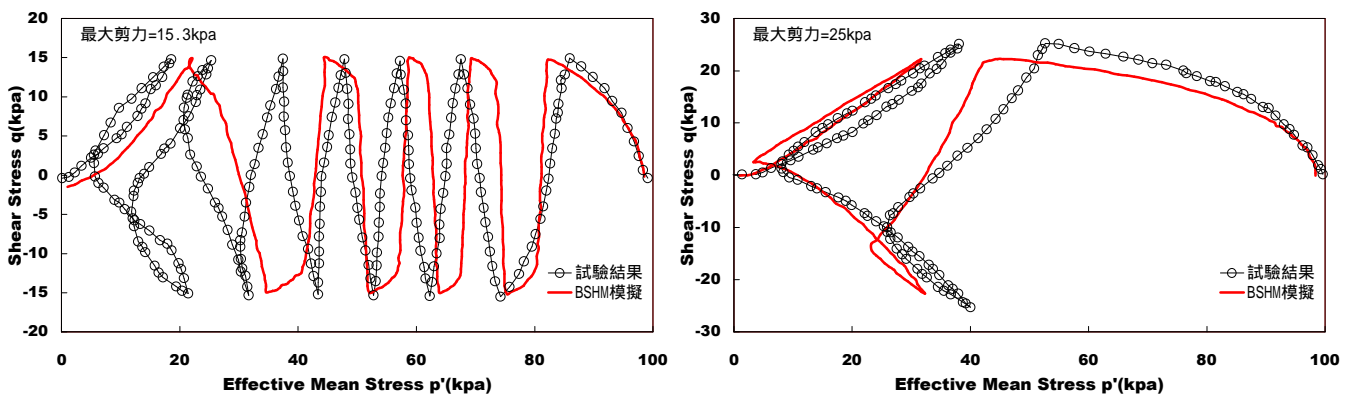


圖 5 Lighton Buzzard sand 之應力控制單純剪力試驗

五、結論

本文利用 Wang 所提出之限界降伏面模式，以 C++ 語言開發之 FLAC 用 UDM 分析模組模擬靜態及動態三軸試驗、單剪試驗等試驗過程，均可對土壤材料之動態特性，達到堪稱理想之模擬結果。然而，BSHM 模式之數學理論較工程界常用之土壤模型複雜，參數亦多，為求取這些參數，常需大量之靜態及動態試驗。BSHM 模式最新之發展(Wang. et al, 2002.)已將臨界(Critical State Mechanism)理論納入，如土壤材料之臨界線(Critical State Line)已知，則材料之許多參數可由初始狀態與該線推求，此法將使實際應用 BSHM 模式之複雜度降低許多。本研究雖已將分析工具開發完成，但後續研究工作諸如模型參數之敏感度分析、參數推求程序之簡化與自動化、以及實際工程案例之模擬與應用等，正持續進行中，期能於近期內獲致初步成果，以饗大地工程界諸位先進。

參考文獻

- Wang, Z.L. (1990), "Bounding Surface Hypoplasticity Model for Granular Soils and its Application", Ph.D. Dissertation, University of California at Davis, U.M.I., Dissertation Information Service, Order No. 9110679, Ann Arbor, MI 48106.
- Finn, W.D.L., Lee, K.W. and Martin, G.R. (1977). "An Effective Stress Model for Liquefaction", ASCE J. Geotech. Eng. Div. Vol.103, pp.517-533.
- Pan, Y.W. (2003) "Effective Stress Modeling of Compacted Earth Dam", U.S.-Taiwan Workshop on Soil Liquefaction. Nov. 3-4 2003. National Chiao Tung University, Hsin-Chu, Taiwan
- Beaty, M. and Byrne, P.M. (1998), "An Effective Stress Model for Predicting Liquefaction Behavior of Sand," Proc. Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamic III, Vol.I Geotech. Special Pub. No.75., ASCE Reston, VA, 766-777.
- Prevost, J.H. (1977), "Mathematical Modeling of Monotonic and Cyclic Undrain Clay Behavior", International Journal for Numerical and Analysis Method in Geomechanics, Vol.1, pp. 323-338.
- Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. and Chan, H.C. (1990) "Generalized Plasticity and the Modeling of Soil Behavior", International Journal for Numerical and Analysis Method in Geomechanics, Vol.14, pp.151-190.
- Smith, I.M. (1994). "An Overview of Numerical Procedure in the VELACS Projects," Proc., Numerical Procedure for the Analysis of Soil Liquefaction Problems, Vol.2, Arulanandan, K. and Scott, R.F., eds., A.A. Balkema, Brookfield, Vermont, pp. 1321-1328.
- Arulanandan, K. (1996). "Application of Numerical Procedure in Geotechnical Earthquake Engineering," Proc., Application of Numerical Procedure in Geotechnical Earthquake Engineering, National Science Foundation Workshop/Conference, October, 28-30.
- Dafalias, Y.F. (1982). "Bounding Surface Formulation of Soil Plasticity," Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, pp.253-282.
- Shen, C.K., Jeong, S., Wang, Z.L. and Dafalias, Y.F. (1989). "Behavior of Sile under Monotonic and Cyclic Loadings," Proceeding of the Fourth International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Mexico, pp.209-226.
- Yamada and Ishihara, K. (1983). "Undrained Deformation Characteristics of Sand in Multi-Directional Shear," Soils and Foundations, Vol. 23 No.2, pp.61-79.
- Wang, Zhi-Liang, Dafalias, Yannis F., Li, Xiang-Song, Makdisi, Faiz I. (2002). "State Pressure Index for Modeling Sand Behavior", J. Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.

128 No. 6, June 1, 2002.